Tentamen Fouriertheorie, 9:00-12:00, 3 november 2005

(1) Geef voorbeelden van: (a) een Banachruimte E die geen Hilbertruimte is, (b) een Hilbertruimte van oneindige dimensie.

(2) De vectorruimte E bestaat uit de rijtjes $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ waarvoor geldt $a_i \in \mathbf{R}$ en er is een getal N (dat van a afhangt) met $a_i = 0$ voor alle $i \geq N$. Definiëer $||a|| := \max(\{|a_i| \mid i \geq 1\})$.
(a) Bewijs dat $||\ ||$ een norm is.
(b) Laat zien dat de ruimte E, voorzien van die norm, niet volledig is (d.w.z. niet iedere Cauchy-rij heeft een limiet).

(3) De functies $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ worden gegeven door
$f_n(x) = 1 + 2(\cos x)^n - 3(\sin x)^n$.
(a) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$ bijna overal geldt op $[0, 2\pi]$.
(b) Volgens welke stelling(en) is $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)dx = 2\pi$?

(4) (a) Geef de definitie van een meetbare deelverzameling van $\mathbf{R}^m$.
(b) Wat betekent $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$?
(c) Hoe wordt $L^1(\mathbf{R})$ gedefiniëerd?

(5) Geef de definitie van: 'verzameling met Lebesgue maat 0' en een voorbeeld van een oneindige deelverzameling A van $[0, 1]$ met Lebesgue maat 0.

(6) f is de 2π-periodieke functie met $f(x) = \sin(x/4)$ voor $-\pi < x \leq \pi$.
(a) Waarom geldt voor de Fourierreeks $a_0 + \sum_{n\geq1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ van f dat $a_n = 0$ voor $n \geq 0$?
(b) Is $f(x)$ gelijk aan $\sum b_n \sin(nx)$ voor elke x?
(c) Op welke (gesloten) segmenten $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ is de convergentie van de Fourierreeks $\sum_{n\geq1} b_n \sin(nx)$ uniform?
(d) Bereken de Fouriercoefficienten b_n.
(e) Volgens welke stelling is de convergentie van de Fourierreeks van $\cos(x/4)$ uniform?
(f) Bereken de Fourierreeks van $\cos(x/4)$ met behulp van die van $\sin(x/4)$.

(7) Laten reële getallen $b_i > 0$ voor $i = 1, \ldots, m$ gegeven zijn. Definiëer $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ door $f(x) = 1$ als $x = (x_1, \ldots, x_m)$ voldoet aan $|x_i| < b_i$ voor alle i en $f(x) = 0$ voor alle andere $x \in \mathbf{R}^m$. Toon aan dat $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ en bereken de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}(f)$.

(8) $f(x) := xe^{-\pi x^2}$. Bereken $||f||_2$ en de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}$.

(9) Bereken de convolutie $f * g$ van de functies $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, gegeven door $f(x) = e^{-ax^2}$ en $g(x) = e^{-bx^2}$. Hierbij $a, b \in \mathbf{R}$ en $a, b > 0$.
N.B. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.